2011年度高3　第11回数学確認テスト（10月21日）8:10〜8:25　　　組　　番　氏名　　　　得点

正四面体ABCDにおいて，平面BCD，3辺AB，AC，ADのすべてに接する球をSとする。頂点Aから平面BCDに引いた垂線と平面BCDの交点をPとすると，Sの中心は線分AP上にある。また，Sと辺ABの接点をQとする。

(1)　正四面体ABCDの1辺の長さが$\sqrt{6}$であるとき

$$\mathrm{BP}=\sqrt{\boxed{ア}},\quad \mathrm{AP}=\boxed{イ}$$

$$\tan\angle\mathrm{BAP}=\frac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}},\quad \mathrm{AQ}=\sqrt{\boxed{オ}}-\sqrt{\boxed{カ}}$$

であるから，Sの半径は$\sqrt{\boxed{キ}}-\boxed{ク}$であり

$$(S\text{の表面積})=\left(\boxed{ケコ}-\boxed{サ}\sqrt{\boxed{シ}}\right)\pi$$

$$(S\text{の体積})=\left(\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セ}}-\frac{\boxed{ソタ}}{\boxed{チ}}\right)\pi$$

である。

(2)　正四面体ABCDの1辺の長さが$\frac{\sqrt{6}}{2}$であるとき

$$(S\text{の表面積})=\left(\boxed{ツ}-\boxed{テ}\sqrt{\boxed{ト}}\right)\pi$$

$$(S\text{の体積})=\left(\sqrt{\boxed{ナ}}-\frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}\right)\pi$$

である。

ア	
イ	
ウ	
エ	
オ	
カ	
キ	
ク	
ケ	
コ	
サ	
シ	
ス	
セ	
ソ	
タ	
チ	
ツ	
テ	
ト	
ナ	
ニ	
ヌ	
ネ	
ノ	

〈演習〉

整数 a に対して

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=7a-7 \\ x^2-xy+y^2=a+11 \end{cases}$$

を満たす実数 x，y を考える。このとき

$$x^2+y^2=\boxed{\text{ア}}\,a+\boxed{\text{イ}},\quad xy=\boxed{\text{ウ}}\,a-\boxed{\text{エ}}$$

であるから

$$(x+y)^2=\boxed{\text{オカ}}\,a-\boxed{\text{キク}},\quad (x-y)^2=\boxed{\text{ケコ}}\,a+\boxed{\text{サシ}}$$

が成り立つ。

(1) $a=4$ のとき，$x>y>0$ を満たす x，y は

$$x=\sqrt{\boxed{\text{ス}}}+\sqrt{\boxed{\text{セ}}},\quad y=\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}-\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$$

である。

(2) x，y がともに実数となるのは，a が $\boxed{\text{チ}}$ 以上 $\boxed{\text{ツテ}}$ 以下の整数のときである。

(3) $x>y>0$ を満たす整数 x，y が存在するのは $a=\boxed{\text{ト}}$ のときであり，このような x，y は

$$x=\boxed{\text{ナ}},\quad y=\boxed{\text{ニ}}$$

である。

ア	
イ	
ウ	
エ	
オ	
カ	
キ	
ク	
ケ	
コ	
サ	
シ	
ス	
セ	
ソ	
タ	
チ	
ツ	
テ	
ト	
ナ	
ニ	
ヌ	
ネ	
ノ	

2011年度高3 第11回数学確認テスト（10月21日） 8:10～8:25

組　番　氏名　　　　得点

正四面体 ABCD において，平面 BCD，3辺 AB，AC，AD のすべてに接する球を S とする。頂点 A から平面 BCD に引いた垂線と平面 BCD の交点を P とすると，S の中心は線分 AP 上にある。また，S と辺 AB の接点を Q とする。

(1) 正四面体 ABCD の1辺の長さが $\sqrt{6}$ であるとき

$$\mathrm{BP}=\sqrt{\boxed{ア}},\quad \mathrm{AP}=\boxed{イ}$$

$$\tan\angle\mathrm{BAP}=\frac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}},\quad \mathrm{AQ}=\sqrt{\boxed{オ}}-\sqrt{\boxed{カ}}$$

であるから，S の半径は $\sqrt{\boxed{キ}}-\boxed{ク}$ であり

$$(S\text{の表面積})=\left(\boxed{ケコ}-\boxed{サ}\sqrt{\boxed{シ}}\right)\pi$$

$$(S\text{の体積})=\left(\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セ}}-\frac{\boxed{ソタ}}{\boxed{チ}}\right)\pi$$

である。

(2) 正四面体 ABCD の1辺の長さが $\frac{\sqrt{6}}{2}$ であるとき

$$(S\text{の表面積})=\left(\boxed{ツ}-\boxed{テ}\sqrt{\boxed{ト}}\right)\pi$$

$$(S\text{の体積})=\left(\sqrt{\boxed{ナ}}-\frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}\right)\pi$$

である。

(1) P は三角形 BCD の外心であるから，BP は三角形 BCD の外接円の半径である。　←△ABP≡△ACP≡△ADP から BP=CP=DP

よって，三角形 BCD において

$$\mathrm{BP}=\frac{\mathrm{BC}}{2\sin\angle\mathrm{BDC}}=\frac{\sqrt{6}}{2\sin 60^\circ}=\sqrt{2}$$　←3−(2)(正弦定理)

であるから

$$\mathrm{AP}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BP}^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}=2$$　←4−(1)(三平方の定理)

したがって

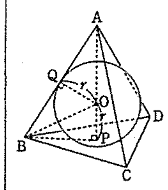
$$\tan\angle\mathrm{BAP}=\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$　←3−(1)

また，S の中心を O，半径を r とすると

$\mathrm{BQ}=\mathrm{BP}=\sqrt{2}$（△BQO≡△BPO より）

$\mathrm{AQ}=\mathrm{AB}-\mathrm{BQ}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

$r=\mathrm{OQ}=\mathrm{AQ}\tan\angle\mathrm{BAP}=(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}-1$



であるから，S の表面積を T，体積を V とすると

$T=4\pi r^2=(16-8\sqrt{3})\pi$

$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\left(8\sqrt{3}-\frac{40}{3}\right)\pi$　←3−(3)(球)

(2) 正四面体 ABCD の1辺の長さを a とすると，$a=\sqrt{6}$ のときの正四面体 ABCD と $a=\frac{\sqrt{6}}{2}$ のときの正四面体 ABCD はそれぞれ相似であり，相似比は $1:\frac{1}{2}$ であるから，$a=\frac{\sqrt{6}}{2}$ のときの

S の表面積は $\left(\frac{1}{2}\right)^2T=(4-2\sqrt{3})\pi$　←3−(3)(相似な立体)

S の体積は $\left(\frac{1}{2}\right)^3V=\left(\sqrt{3}-\frac{5}{3}\right)\pi$

ア	2	2点
イ	2	2点
ウ	2	2点
エ	2	
オ	6	2点
カ	2	
キ	3	2点
ク	1	
ケ	1	2点
コ	6	
サ	8	
シ	3	
ス	8	2点
セ	3	
ソ	4	
タ	0	
チ	3	
ツ	4	3点
テ	2	
ト	3	
ナ	3	3点
ニ	5	
ヌ	3	
ネ	／	
ノ	／	

<演習>

整数 a に対して

$$\begin{cases}x^2+xy+y^2=7a-7\\ x^2-xy+y^2=a+11\end{cases}$$

を満たす実数 x，y を考える。このとき

$$x^2+y^2=\boxed{ア}a+\boxed{イ},\quad xy=\boxed{ウ}a-\boxed{エ}$$

であるから

$$(x+y)^2=\boxed{オカ}a-\boxed{キク},\quad (x-y)^2=\boxed{ケコ}a+\boxed{サシ}$$

が成り立つ。

(1) $a=4$ のとき，$x>y>0$ を満たす x，y は

$$x=\sqrt{\boxed{ス}}+\sqrt{\boxed{セ}},\quad y=\sqrt{\boxed{ソ}}-\sqrt{\boxed{タ}}$$

である。

(2) x，y がともに実数となるのは，a が $\boxed{チ}$ 以上 $\boxed{ツテ}$ 以下の整数のときである。

(3) $x>y>0$ を満たす整数 x，y が存在するのは $a=\boxed{ト}$ のときであり，このような x，y は

$$x=\boxed{ナ},\quad y=\boxed{ニ}$$

である。

$x^2+xy+y^2=7a-7$　……①

$x^2-xy+y^2=a+11$　……②

とおくと，$(①+②)\times\frac{1}{2}$ より

$x^2+y^2=4a+2$　……③

$(①-②)\times\frac{1}{2}$ より

$xy=3a-9$　……④

③+④×2 より

$(x+y)^2=10a-16$　……⑤

③−④×2 より

$(x-y)^2=-2a+20$　……⑥

(1) $a=4$ のとき⑤，⑥より

$(x+y)^2=24$，$(x-y)^2=12$

$x>y>0$ より $x+y>0$，$x-y>0$ であるから

$x+y=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$，$x-y=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

よって　$x=\sqrt{6}+\sqrt{3}$，$y=\sqrt{6}-\sqrt{3}$

(2) x，y がともに実数となるのは　←(実数)^2 はつねに0以上。

$(x+y)^2\geqq 0$ かつ $(x-y)^2\geqq 0$

のときであるから，⑤，⑥より

$10a-16\geqq 0$ かつ $-2a+20\geqq 0$

ゆえに，$\frac{8}{5}\leqq a\leqq 10$

ここで，a は整数であるから，x，y がともに実数となるのは

$a=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots,\ 10$

のときである。

(3) $x>y>0$ を満たす整数 x，y が存在するとき

$xy>0$，$(x-y)^2>0$

よって，④，⑥より

$3a-9>0$，$-2a+20>0$

であるから $3<a<10$ であり，整数 a は 4，5，6，7，8，9 のいずれかである。

また，このとき⑥より $-2a+20$ は平方数であるから，次の表より $a=8$　←$-2a+20=(整数)^2$

a	4	5	6	7	8	9
$-2a+20$	12	10	8	6	4	2

$a=8$ のとき，⑤，⑥より

$(x+y)^2=64$，$(x-y)^2=4$

であり，$x>y>0$ より

$x+y=8$，$x-y=2$

よって　$x=5$，$y=3$

ア	4
イ	2
ウ	3
エ	9
オ	1
カ	0
キ	1
ク	6
ケ	−
コ	2
サ	2
シ	0
ス	6
セ	3
ソ	6
タ	3
チ	2
ツ	1
テ	0
ト	8
ナ	5
ニ	3
ヌ	／
ネ	／
ノ	／